Hot Spot Policing usando Teoría de Juegos [1]

Gabriel Espejo[a], Gastón L'Huillier, Richard Weber

[a]*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, República 701, Santiago, Chile*

Abstract

En este trabajo se desarrolla un modelo que permite obtener estrategias óptimas de vigilancia policial sobre un ambiente utilizando herramientas de teoría de juegos. Para ello, la interacción que ocurre entre delincuentes y policías se modela mediante dos juegos que ocurren de manera simultánea. Primero, un juego líder-seguidor permite caracterizar el efecto de la policía sobre la utilidad que reciben los delincuentes al cometer delitos, y segundo, un juego que modela la interacción que ocurre entre los delincuentes al tomar decisiones de manera independiente. Al testear el modelo en un ambiente generado por computador, se puede ver que la estrategia desarrollada en este trabajo genera menores niveles de utilidad para los delincuentes al compararla con otros esquemas de vigilancia.

Keywords: Crime Modeling, Game Theory, Security Games

1. Introducción

Desde la perspectiva de la criminología ambiental, un evento delictual debe ser entendido como la interacción entre una disposición de un individuo a la comisión del delito y la situación que provee las oportunidades para que el delito ocurra [7]. Sutherland [21] ya reconocía que un acto delictual podía ser explicado por una componente histórica, entendida como la suma de los procesos que operan en un delincuente previo a cometer un delito, y una componente situacional, entendida como el set de condiciones que determinan el comportamiento del delincuente en el momento en que comete el delito. Considerando esta distinción es posible definir dos grandes formas de combatir la delincuencia. La primera, focalizada en la criminalidad, estudia las raíces biológicas, psicológicas y sociales que llevan a los individuos a cometer actos delictuales, y busca intervenir en aquellos aspectos que determinan esta inclinación. La segunda estrategia se enfoca en la prevención situacional del delito, y busca alterar los determinantes del medio ambiente que influyen en la decisión que toma un delincuente al cometer un delito, ya sea reduciendo las oportunidades de que el delito ocurra, o aumentando las probabilidades de aprehensión del delincuente [6]. Para una revisión crítica de distintas técnicas de reducción de la delincuencia vease Sherman et al. [19].

[1]Este trabajo ha sido apoyado por el Instituto Sistemas Complejos de Ingeniera (ICM: P-05-004-F, CONICYT: FBO16; www.isci.cl) y el proyecto Anillo "Quantitative methods in security" (ACT87; www.ceamos.cl). El primer autor agradece la estadía en el Institute for Canadian Urban Research Studies (ICURS) de la Simon Fraser University, Vancouver, Canadá.

El enfoque de la prevención situacional del delito tiene su fundamento metodológico en la teoría de la elección racional [8, 9]. De acuerdo a esta teoría, los delincuentes actúan como tomadores de decisiones racionales que evalúan la información que el ambiente inmediato le entrega al momento de querer cometer un delito. De esta forma, cuando la situación se presenta desfavorable para un delincuente, independiente de su disposición, el evento no ocurrirá. En su famoso trabajo "Crime and Punishment: An Economic Approach" Becker [2] propone un enfoque económico para modelar este proceso de toma de decisiones como un problema de evaluación de la utilidad esperada en cada situación. De acuerdo a Becker, la utilidad esperada por un delincuente al cometer un delito U_c toma la forma detallada en 1.

$$U_c = p \cdot \mathcal{U}(Y - S) + (1 - p) \cdot \mathcal{U}(Y) \tag{1}$$

en que p es la probabilidad de ser aprehendido al cometer un delito que entrega una ganancia Y con una pena asociada S a la captura. Aquí Y resume los beneficios financieros que se pueden obtener del delito, pero también incluye el equivalente monetario de otras motivaciones, como aceptación, orgullo, sensación de poder, etc., de la misma forma que S no solo hace referencia a los costos económicos de la aprehensión. $\mathcal{U} : R \to R_0^+$ es una función de utilidad. De acuerdo a este enfoque, un delito ocurre solo si $U_c > U_L$, con U_L la utilidad que podría recibir un delincuente al realizar una actividad legal.

Analizando la ecuación (1), existen dos estrategias que los organismos encargados de la seguridad y el control de la delincuencia pueden seguir para reducir la actividad delictual [12]. Por una parte, $\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}S} = -p\frac{\mathrm{d}U(Y-S)}{\mathrm{d}S} < 0$ indica que al aumentar las penas asociadas al delito disminuye la utilidad esperada de los delincuentes, reduciendo de esta forma la delincuencia. Este efecto ha sido ampliamente discutido en la literatura y si bien durante un primer momento la evidencia no era concluyente respecto de si los cambios eran significativos, pese a ocurrir en la dirección esperada [3], con el pasar del tiempo esta incertidumbre desaparece y se concluye que existe una marcada correlación entre un aumento en las penas y una reducción en la delincuencia [17]. Sin embargo, aumentar las penas, requiere de un aumento en los costos asociados a aplicar vigilancia, contratar personal administrativo, construir cárceles, etc., afectando no solo a los delincuentes sino que al resto de la sociedad que debe financiar estos gastos [2]. Ademas, los efectos de este tipo de políticas no son observables en el corto plazo.

Por su parte, $\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}p} = U(Y - S) - U(Y) < 0$ indica que al aumentar la probabilidad de aprehensión también se reducen los incentivos para la comisión de delitos. Por una parte se puede considerar la idea de aumentar la dotación policial para de esta forma hacer mas probable la aprehensión. Si bien la literatura muestra una relación negativa entre la cantidad de efectivos policiales y el nivel de delincuencia [16, 23], este tipo de estrategias no pueden ser implementadas a corto plazo por el tiempo que se requiere de entrenamiento de los nuevos policías, y tiene costos asociados que afectan el beneficio social que se obtiene de este tipo de políticas [15].

Otra forma de conseguir un aumento en el indice de aprehensión, pero sin incurrir en los costos asociados al aumento de la dotación policial, y con beneficios observables en el muy corto plazo, es mediante la utilización mas eficiente de los recursos ya existentes. Sin duda la ubicación de efectivos policiales en el ambiente induce a una reducción de la criminalidad en ese sector, en un efecto conocido en la literatura como disuasión directa [18, 11]. Por otra parte, considerando que la delincuencia no se encuentra distribuida de manera homogénea en el ambiente, sino que tiende a concentrarse en lugares que en criminología son conocidos como hot spots [5, 1], permite intuir que los efectos que produce la vigilancia policial en los niveles de delincuencia varían dependiendo del sector. Estos dos hechos han dado origen a una nueva técnica de prevención de la delincuencia conocida como *Hot Spots Policing* y que consiste básicamente en concentrar los efectivos policiales a los sectores mas conflictivos [4]. Si bien la evidencia empírica muestra una reducción sustantiva en los niveles de delincuencia cuando se aplican este tipo de técnicas [22], pocos trabajos incluyen los efectos de desplazamiento del delito como una variable a considerar cuando al momento de definir el esquema de patrullaje.

El modelo propuesto en este trabajo presenta una estrategia de *Hot Spots Policing* basado en las herramientas que entrega la teoría de juegos. Modelar la interacción entre la policía y los delincuentes como un juego permite incorporar en el modelo de manera explícita la racionalidad de los tomadores de decisiones así como la influencia reciproca que las estrategias de cada jugador ejercen sobre las decisiones tomadas por el resto. Por otra parte, la formulación propuesta incorpora en el proceso de toma de decisiones de la policía los efectos de desplazamiento que provoca la vigilancia policial en la distribución de los delitos, logrando así estrategias de control de delincuencia que por una parte combaten los delitos existentes, pero que también previenen la aparición de nuevas zonas de conflicto.

El paper continúa de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta el modelo propuesto en este trabajo para el control de la delincuencia. En la sección 3 se muestra una aplicación del modelo en un ambiente computacional y se comentan los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 4 se concluye y presentan algunas lineas de investigación para trabajos futuros.

2. Modelo de Vigilancia Policial Basado en Teoría de Juegos

En este capítulo vamos a presentar un modelo basado en teoría de juegos para definir estrategias de vigilancia sobre un ambiente, recogiendo la idea del *Hot Spot Policing* como forma de control de delincuencia. Para ello, vamos a separar el problema en dos partes. Primero se presenta un modelo para la distribución de los delincuentes en la vía pública sin considerar que existe control policial. De esta forma es posible encontrar una formulación que nos indica cómo se afectan los delincuentes entre sí en el proceso de toma de decisiones, aislados de la influencia de la policía. Luego de haber estudiado este problema, se introduce en el juego a las fuerzas de orden público como otro jugador y se estudia el efecto que tienen las decisiones tomadas por la policía sobre el resultado del proceso de toma de decisiones de los delincuentes. Conociendo este efecto, será posible formular un problema de optimización que permita a la policía encontrar las estrategias de vigilancia que reduzcan al mínimo posible los niveles de delincuencia generados sobre el ambiente.

2.1. Juego de Nash para la distribución de delincuentes

Puesto que los delitos no se distribuyen de manera uniforme sobre el ambiente, es de suponer que los delincuentes poseen un orden de preferencias sobre los sectores en los que delinquir. En este capítulo se presenta una formulación basada en un equilibrio de Nash, que intenta emular el proceso de toma de decisiones de los delincuentes al escoger la ubicación en la que cometer delitos. En esta sección no se considerarán los efectos que tiene la fuerza policial sobre el comportamiento de los delincuentes, porque lo que importa caracterizar aquí es la interacción que ocurre entre los delincuentes cuando toman decisiones. En la siguiente sección se estudia el efecto que la vigilancia policial ejerce sobre esta interacción y se proponen métodos de control de la delincuencia basados en estos efectos.

Para comenzar, consideremos un ambiente que se encuentra dividido en K sectores en los que los delincuentes pueden tomar posiciones para delinquir. Estos sectores pueden representar comunas, cuadrantes, manzanas, esquinas, segmentos de calle, etc. En este caso se asumirá que el ambiente se encuentra dividido en celdas desjuntas que en su conjunto representan el área total sobre la que se esta trabajando. Para representar la heterogeneidad que existe entre los distintos lugares, se asumirá que cada celda $k \in \{1, \dots, K\}$ posee una atractividad intrínseca B_k que representa todas aquellas variables ambientales que considera un delincuente al momento de escoger el lugar que le parece mas adecuado para delinquir.

Supondremos que existe un conjunto de delincuentes que desean cometer delitos sobre este ambiente, y que cada uno de los delincuentes debe decidir sobre cual de las K celdas tomar posición para delinquir. De esta forma, el conjunto de estrategias puras de cada delincuente en el juego el igual al conjunto de celdas en las que se encuentra dividido el ambiente. Cuando todos los delincuentes han tomado posición en las celdas, la distribución de la población puede ser resumida mediante un vector de proporciones $p \in \Delta^K$, con Δ^K el simplex de dimensión K, definido como:

$$\Delta^K = \Big\{(p_1, \dots, p_K)\Big| \sum_{k=1}^{K} p_k = 1; p_k \geq 0\Big\} \tag{2}$$

Para determinar completamente el juego es necesario definir las funciones de pago de cada delincuente. Para ello definimos $V_k(B_k, p_k) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como la utilidad que recibe un delincuente al ubicarse en la celda k que tiene una atractividad B_k cuando la proporción de delincuentes que se ubican en esa misma celda es de p_k. De esta forma, la utilidad que recibe un delincuente al tomar posición en una celda no solo depende de las características de la celda en si misma sino que también se ve influenciada por las decisiones tomadas por el resto de los delincuentes.

En este trabajo asumiremos que todos los delincuentes son del mismo tipo y toman decisiones de la misma forma, por lo que no es necesario definir una función de utilidad para cada delincuente en particular. Bajo este supuesto, la estrategia jugada en el equilibrio es la misma para todos los delincuentes. De esta forma, si bien Δ^K puede ser entendido como el espacio de las posibles distribuciones de la población sobre el conjunto de celdas del ambiente, en este juego en particular, es posible interpretarlo como el espacio de estrategias mixtas para cada jugador. Bajo esta perspectiva, cuando un individuo juega la estrategia mixta dada por el vector $p \in \Delta^K$, se interpreta como que el jugador escoge la estrategia pura k con probabilidad p_k.

Evidentemente, a medida que B_k aumenta, también lo hace la utilidad que recibe cada delincuente en esa celda. Como ya se mencionó anteriormente, a medida que un lugar es mas adecuado para la comisión de un delito, mayores son las oportunidades que un delincuente tendrá de obtener ganancias en ese sector, ya sea por que puede cometer un mayor número de actos delictuales, o por que la probabilidad de que esos actos resulten exitosos para el delincuente son mayores. Formalmente, se debe tener que $\frac{\partial V_k(B_k,p_k)}{\partial B_k} \geq 0 \ \forall k$

Por otra parte, cuando la proporción de delincuentes en la celda k aumenta, la utilidad que recibe cada delincuente de manera individual disminuye. Para ver la intuición detras de este efecto, supongamos que un sector proporciona un número fijo de oportunidades de delito dado por el parámetro B_k. A medida que la cantidad de delincuentes en el sector aumenta, estas oportunidades deben ser aprovechadas por un mayor número de individuos, por lo que en valor esperado, cada delincuente obtiene una utilidad menor. Formalmente, este efecto se incluye en el modelo imponiendo que $\frac{\partial V_k(B_k,p_k)}{\partial p_k} \leq 0 \ \forall k$.

Si bien los estudios en Crime Prevention Through Evironmental Design (CPTED) apuntan a que existen formas de modificar las componentes ambientales que hacen de un lugar mas propenso a la ocurrencia de delitos, en este trabajo vamos a considerar que esta característica inherente del ambiente no se modifica en el juego, por lo que el parámetro B_k será omitido de la función de utilidad de los delincuentes, que de ahora en adelante tomarán la forma $V_k(p_k) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Inicialmente, se puede considerar que los delincuentes actúan como una mafia que decide concertadamente cómo distribuir a los individuos en las celdas de manera que la utilidad total percibida sea máxima. Bajo este supuesto, los delincuentes actúan como obedeciendo a un tomador de decisiones central que resuelve el problema de determinar la proporción de individuos p_k que enviar a delinquir a la celda k de manera de obtener la mayor utilidad posible para el total de la población. En este caso, el problema no se puede interpretar como un juego entre delincuentes, ya que los agentes no actúan maximizando su propia función de utilidad.

La distribución óptima de delincuentes sobre el ambiente puede ser encontrada al resolver el siguiente problema de optimización descrito en 3.

$$
\begin{aligned}
\max_{p_k} \quad & \sum_{k=1}^{K} p_k V_k(p_k) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^{K} p_k = 1 \\
& p_k \geq 0 \qquad\qquad \forall k \in \{1, \ldots, K\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

La función objetivo representa la utilidad promedio de un individuo en la mafia. En la solución óptima de este problema existen individuos que reciben menor utilidad que otros, pero en términos globales, actuando de esta forma se obtiene una mayor utilidad esperada para la población total.

Si bien este modelo puede ser adecuado para bandas que actúan de manera organizada al atacar un determinado lugar, plantear que los delincuentes actúan de manera concertada no parece muy acertado en situaciones mas amplias, como es el caso de los delitos en la vía pública. Por ello, para construir un mas realista, se asume que cada delincuente actúa de manera individual buscando maximizando su propia función de utilidad. Al imponer esta condición sobre el proceso de toma de posiciones en el ambiente, la interacción que ocurre entre los delincuentes puede ser interpretada como un juego en que individuos racionales se afectan unos a otros al tomar decisiones. Cuando todos los delincuentes deciden de manera simultanea sus posiciones, el problema anterior toma la forma de un juego que en la literatura se conoce como *Habitat Selection Game*.

Para caracterizar la solución a este juego, sin perdida de generalidad, asumiremos que las celdas se encuentran ordenadas de tal manera que $B_1 > B_2 > \ldots > B_K$. Supongamos que los delincuentes comienzan a llenar el ambiente uno a la vez. El primer delincuente tomará posición en la celda que tenga mayor atractividad intrínseca. A medida que mas delincuentes comiencen a ubicarse en esta celda, la utilidad individual de cada uno de ellos decrecerá, hasta que en algún momento, el siguiente delincuente que llegue al ambiente observará que la utilidad que percibe en la segunda celda será la misma que en la primera. Desde ese punto en adelante, ambas celdas serán ocupadas, manteniéndose la condición de igualdad de utilidades entre ellas, hasta que el pago recibido en estas dos celdas sea igual al de la tercera, y ésta comience a ser utilizada. Finalmente, cuando toda la población de delincuentes haya tomado posiciones en las celdas, todas las celdas utilizadas entregarán la misma utilidad, y ninguna celda vacía le entregará una utilidad mayor a los delincuentes que la que ya se encuentran percibiendo. En otras palabras, si las primeras l celdas son utilizadas en la solución de este juego, se debe cumplir que:

$$V_1(p_1) = V_2(p_2) = \ldots = V_l(p_l) > V_{l+1}(0) > \ldots > V_K(0) \tag{4}$$

con $\sum_{k=1}^{l} p_k = 1$, y ningún individuo tiene incentivos unilaterales para cambiar de posición, por que cualquier cambio se reflejaría en una disminución de su utilidad.

Por su parte, si consideramos que los delincuentes toman posiciones de manera simultanea, la teoría de juegos predice que el equilibrio de Nash en esta situación es un vector $\mathbf{p}^* \in \Delta^K$ tal que se cumple la condición 5 donde $\mathbf{p} \cdot V(\mathbf{p}^*) = \sum_{i=1}^{K} p_k V_k(p_k^*)$ es el pago que recibe un individuo jugando la estrategia k una proporción p_k de las veces, cuando la población se encuentra distribuida de acuerdo al equilibrio de Nash $\mathbf{p}^*$ [14].

$$\mathbf{p} \cdot V(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{p}^* \cdot V(\mathbf{p}^*) \quad \forall \mathbf{p} \in \Delta^K \tag{5}$$

Cressman & Krivan [10] muestran que (4) y (5) son dos caracterizaciones equivalentes para la solución de este juego, y que cuando las funciones de pago son decrecientes en la proporción de individuos para cada celda, esta solución es única.

Para encontrar de manera explícita la distribución de la población en el equilibrio de Nash, basta resolver el siguiente problema de optimización.

$$\begin{array}{lll}
\max\limits_{p_k, y_k, \gamma} & \gamma & \\
\text{s.t.} & \gamma \leq G \cdot (1 - y_k) + V_k(p_k) & \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& \gamma \geq V_k(p_k) & \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& y_k \geq p_k & \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& \displaystyle\sum_{k=1}^{K} p_k = 1 & \\
& p_k \geq 0 & \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& y_k \in \{0, 1\} & \forall k \in \{1, \ldots, K\}
\end{array} \tag{6}$$

En el problema anterior, la variable γ indica la utilidad de los delincuentes en el equilibrio. Puesto que todas las celdas utilizadas deben tener la misma utilidad y las celdas vacías deben tener utilidades inferiores a las del equilibrio, se incluye en la formulación la variable binaria y_k que toma el valor 1 cuando $p_k > 0$ y 0 cuando $p_k = 0$. Considerando $G >> 0$, la primera restricción es activa sólo en las celdas en que existe delincuencia ($y_k = 1, p_k > 0$), y no activa cuando la celda se encuentra vacía ($y_k = 0, p_k = 0$) imponiéndose de esta forma la condición de equilibrio.

2.2. Juegos de Stackelberg para el control del delito

Habiendo determinado la forma en que los delincuentes se distribuyen en el ambiente considerando solo la influencia del ambiente y de los mismos delincuentes en su proceso de toma de decisiones, en esta sección incluiremos en el análisis los efectos que provocan los efectivos policiales sobre esta distribución. Evidentemente, a medida que los niveles de protección policial aumentan en un sector, este se vuelve menos atractivo para los delincuentes, aun cuando la componente ambiental no cambie.

La forma en que ocurre la interacción entre la policía y los delincuentes se modelará como un juego de líder-seguidor. En una primera etapa, la policía, actuando como líder, toma la decisión de ubicar sus agentes sobre las K celdas de manera que s_k indica la proporción de efectivos policiales enviados a la celda k, con $\sum_{k=1}^{K} s_k = 1$. Luego de que la policía ha tomado sus posiciones, los delincuentes, actuando como seguidores, observan esta distribución, y deciden a su vez qué ubicaciones que tomar, definiendo las proporciones p_k con $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$. Conocidos s_k y p_k $\forall k$, los delincuentes reciben sus pagos.

En este modelo en particular, los agentes policiales serán considerados como un grupo organizado que responde a las decisiones tomadas por un planificador central, de manera que en este juego las fuerzas de orden público son consideradas como un único jugador. Si bien la fuerza policial no solo se preocupa de controlar la delincuencia, en este modelo se considerará este como su único objetivo, de manera que el actuar de la policía solo busca reducir la utilidad percibida por los delincuentes al mínimo posible. Así, esta situación puede ser modelada como un juego de suma cero entre la policía y los delincuentes.

Por incluir el efecto que tiene la policía sobre el proceso de toma de decisiones de los delincuentes, en esta sección se asumirá que la utilidad de los delincuentes en la celda k depende no solo de la proporción de delincuentes en la celda p_k y de la utilidad intrínseca B_k sino que también de la cantidad de seguridad s_k presente en la celda. De esta manera, la utilidad de los delincuentes en la celda k queda definida por $V_k(p_k, s_k) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Naturalmente, a medida que aumenta el control policial en una celda, la utilidad percibida por los delincuentes en la celda disminuye, y por lo tanto, $\frac{\partial V_k(p_k, s_k)}{\partial s_k} \leq 0$.

El razonamiento para encontrar el equilibrio en este tipo de juegos es el siguiente. Una vez que la policía, como líder en el juego, a tomado posición en el ambiente, esta distribución no puede ser cambiada. Supongamos que la distribución de la policía es un vector $s = (s_1, \ldots, s_K) \in \Delta^K$. Cuando los delincuentes deben tomar la determinación de como distribuirse en el ambiente, consideran la decisión de la policía como un parámetro fijo en su función de utilidad, y por lo tanto deben encontrar la distribución óptima solo considerando la atractividad intrínseca de las celdas y el comportamiento del resto de los delincuentes, tal como se detalló en la sección anterior. Llamemos a esta distribución $\mathcal{R}(s)$, la función respuesta de los delincuentes a la estrategia $s \in \Delta^K$ de la policía. Como el juego es de información completa, tanto los delincuentes como la policía son capaces de resolver el problema de encontrar $\mathcal{R}(s)$ para cualquier s, y como el juego es de suma cero, el problema que debe resolver la policía es encontrar la distribución s tal que la respuesta de los delincuentes a esta distribución les entregue la menor utilidad posible. Por lo tanto, la estrategia utilizada por la policía es $s^* = \arg\min_{s\in\Delta^K} \mathcal{R}(s)$, y el equilibrio para este juego es $(s^*, \mathcal{R}(s^*))$. Este procedimiento es conocido en la literatura como *Backward Induction* [13].

Como en la situación anterior, este juego puede tomar dos formas distintas de acuerdo a como se como se comportan los delincuentes. Cuando los delincuentes actúan de manera coordinada, el juego es equivalente a la interacción entre un solo líder y un solo seguidor y la solución al juego es lo que se conoce como un equilibrio de Stackelberg [20]. Por otra parte, cuando los delincuentes actúan de manera independiente uno del otro, el juego es equivalente a una situación en que un líder se enfrenta a un grupo de seguidores siguiendo un esquema Stackelberg, pero al mismo tiempo los seguidores se enfrentan entre si de acuerdo a un juego de Nash, dando lugar a un equilibrio que en la literatura se conoce como de Stackelberg-Nash.

Como ya se mencionó anteriormente, al asumir que los delincuentes actúan como una mafia organizada el juego es un clásico juego de Stackelberg con un líder y un seguidor. La función de reacción de los delincuentes ante la decisión de la policía puede ser encontrada al resolver el siguiente problema (7), con $\bar{s_k}$ fijo.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(\bar{s}) = \arg\max_{p_k} \quad & \sum_{k=1}^{K} p_k V_k(p_k, \bar{s_k}) \\
s.t. \quad & \sum_{k=1}^{K} p_k = 1 \\
& p_k \geq 0 \qquad\qquad \forall k \in \{1, \ldots, K\}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Como el juego es de suma cero, la policía debe buscar aquella distribución $s \in \Delta^K$ que minimice la utilidad de los delincuentes, resolviendo $\min_s \mathcal{R}(s)$. Este es un típico problema $\min\max$ y que puede ser resuelto mediante el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
\min_{\gamma,s,p} \quad & \gamma \\
s.t. \quad & \sum_{k=1}^{K} p_k V_k(p_k, s_k) \leq \gamma \\
& \sum_{k=1}^{K} p_k = 1 \\
& \sum_{k=1}^{K} s_k = 1 \\
& p_k \geq 0 \qquad\qquad \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& s_k \geq 0 \qquad\qquad \forall k \in \{1, \ldots, K\}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

En el óptimo, γ entrega la utilidad promedio de los delincuentes con s y p siendo las distribuciones de la policía y los delincuentes en el equilibrio de Stackelberg, respectivamente. Nuevamente, puede ocurrir que en el óptimo no todos los delincuentes obtengan la misma utilidad, pero jugando de esta forma asegura que la mafia obtendrá la mayor utilidad posible de manera global.

Por otra parte, si los delincuentes actúan de manera individual, maximizando su propio beneficio, el juego es una competencia a la Stackelberg entre un líder y un conjunto de seguidores independientes. La característica particular en este juego es que la utilidad de los delincuentes se ve afectada simultáneamente por el resultado de dos juegos. Por una parte, el juego de suma cero que se produce entre los delincuentes y la policía, y por otra, el *Habitat Selection Game* entre delincuentes cuyo resultado se ve afectado por las decisiones tomadas por la policía. La policía, como ya se mencionó, busca minimizar la utilidad que reciben los delincuentes en este equilibrio.

El problema que resuelven los delincuentes cuando las posiciones de la policía son conocidas es equivalente al problema (6) con s_k fijo $\forall k$ en la función de utilidad por cada celda. De esta forma, se tiene que la función de reacción de los delincuentes a cualquier estrategia $\bar{s}$ de la policía viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\bar{s}) = \arg \min_{p_k, y_k, \gamma} \quad & \gamma \\
s.t. \quad & \gamma \leq G \cdot (1 - y_k) + V_k(p_k, \bar{s_k}) && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& \gamma \geq V_k(p_k, \bar{s_k}) && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& y_k \geq p_k && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& \sum_{k=1}^{K} p_k = 1 \\
& p_k \geq 0 && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& y_k \in \{0, 1\} && \forall k \in \{1, \ldots, K\}
\end{aligned} \tag{9}$$

Como el juego entre policía y delincuentes es de información completa, la policía conoce $\mathcal{R}(s)$ para cada s, por lo que, al igual que en (8), la estrategia óptima a utilizar por parte de las fuerzas de orden público es aquella que le entrega la menor utilidad a los delincuentes. Este problema puede ser formulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\min_{s_k} \max_{p_k, y_k, \gamma} \quad & \gamma \\
\text{s.t.} \quad & \gamma \leq G \cdot (1 - y_k) + V_k(p_k, s_k) && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& \gamma \geq V_k(p_k, s_k) && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& y_k \geq p_k && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& \sum_{k=1}^{K} p_k = 1 \\
& \sum_{k=1}^{K} s_k = 1 \\
& p_k \geq 0 && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& s_k \geq 0 && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& y_k \in \{0, 1\} && \forall k \in \{1, \ldots, K\}
\end{aligned} \tag{10}$$

Al igual que en los casos anteriores, γ es la utilidad que reciben los delincuentes en el equilibrio, y s_k con p_k entregan las estrategias óptimas en el juego Stackelberg.

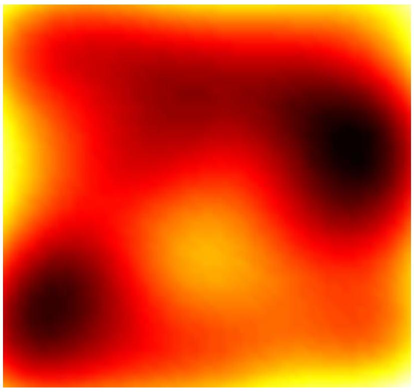


Figure 1: Distribución de la riqueza en el ambiente

3. Experimentos Computacionales y Resultados

Para realizar evaluaciones de los modelos propuestos, vamos a asumir un ambiente constituido por 8×8 celdas cuadradas. Por simplicidad, asumiremos que las funciones de utilidad de los delincuentes son lineales en la proporción de delincuentes y de policías, por lo que para cada celda k la función toma la forma mostrada en la ecuación 11 en que β_k es la utilidad básica de la celda k, y α_k y δ_k son parámetros que controlan los niveles de reducción de la utilidad de los delincuentes cuando aumenta la población de delincuentes y policías en la celda.

$$V_k(p_k, s_k) = \beta_k \left(1 - \frac{p_k N}{\alpha_k} - \frac{s_k M}{\delta_k}\right) \tag{11}$$

Para testear el modelo en un ambiente computacional y obtener conclusiones que permitan evaluar de forma general las soluciones, se asumirá que el efecto de congestión entre delincuentes que toman posición en una misma celda no varía a lo largo del ambiente, por lo que $\alpha_k = \alpha \ \forall k$. De manera similar, los niveles de protección de la policía serán constantes entre celdas, de modo que $\delta_k = \delta \ \forall k$. De este modo, las diferencias de los pagos para los delincuentes entre distintos lugares se presentan exclusivamente por diferencias en el parámetro que indica la riqueza intrínseca de las celdas, β_k. La figura 1 muestra la distribución espacial de la riqueza en el ambiente. Los sectores con colores mas oscuros representan aquellos lugares que concentran una mayor riqueza disponible para los delincuentes.

Habiendo caracterizado las funciones de utilidad de los delincuentes, asi como la distribución de la riqueza en el ambiente, vamos a resolver los problemas de optimización dados por (3) para el caso en que los delincuentes actúan de manera concertada, y (6) para la situación en que los delincuentes actúan de forma individual. Puesto que en estos modelos la policía no tiene influencia en la caracterización del equilibrio, asumiremos que el parámetro M en la función de utilidad (11) toma el valor 0.

Los problemas fueron resueltos utilizando el solver CPLEX 11.2.1, para distintas cantidades de delincuentes. La figura 2 muestra la distribución de delincuentes en el equilibrio de Nash que es la solución al problema (6) con $N = 2000$. Como se puede

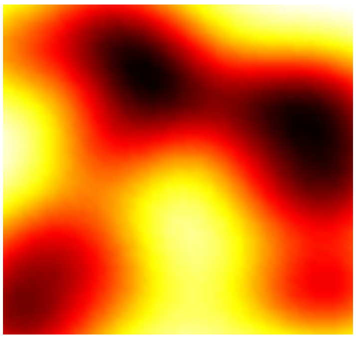


Figure 2: Equilibrio de Nash $N = 2000$

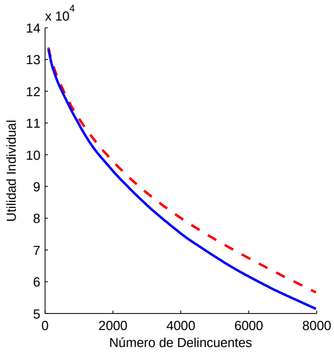


Figure 3: Utilidad vs N° de Delincuentes

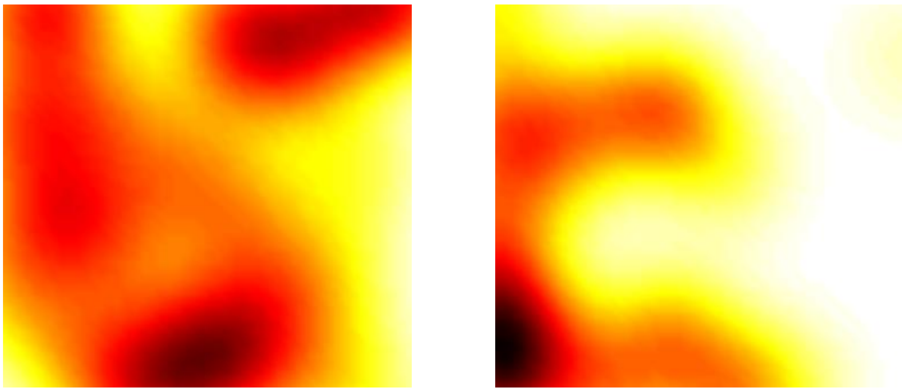
observar, la distribución de delincuentes en cierta forma reproduce la distribución de la riqueza en el ambiente, concentrando una mayor cantidad de delitos en los sectores con mayor riqueza.

El gráfico 3 permite comparar las soluciones de los problemas (3) y (6) para distintas cantidades de delincuentes. En linea discontinua se muestra la utilidad que perciben los delincuentes al distribuirse actuando de manera coordinada, y la linea continua muestra la utilidad de los delincuentes cuando se distribuyen actuando de manera individual. Como se puede observar, los delincuentes obtienen utilidades mayores cuando actúan de manera concertada que cuando toman decisiones individualmente. La disminución de la utilidad debido a la no coordinación de los agentes es común en teoría de juegos, y recibe el nombre de el Precio de la Anarquía. Del gráfico se puede concluir que a medida que aumenta el número de delincuentes en el ambiente, el precio de la anarquía también aumenta.

Para evaluar la eficacia de la estrategia policial definida en este trabajo, vamos a utilizar la situación en que los delincuentes se distribuyen de acuerdo a un equilibrio de Nash sobre el ambiente, fijando la cantidad de delincuentes N en 2000. Para medir que tan bueno es el patrullaje usando teoría de juegos, vamos a definir una estrategia de comparación de la siguiente forma. Asumiendo que la policía es capaz de observar la distribución de los delincuentes en el caso en que no existe vigilancia policial, la estrategia de comparación será vigilar el ambiente enviando sus agentes a las celdas imitando la distribución de los delincuentes en el equilibrio. Vale decir, si p_{NE} es el equilibrio de Nash que se encuentra al resolver el problema (6), la estrategia de comparación a nuestra propuesta será fijar $s = p_{NE}$ para cada celda. La segunda esrategia a utilizar será la propuesta en este trabajo basada en el equilibrio de Stackelberg-Nash.

La figura 4 muestra la distribución de los delincuentes bajo las dos estrategias que estamos comparando, cuando la cantidad de policías vigilando el ambiente es $M = 20$. En la figura 4a se muestra la distribución de los delincuentes bajo la estrategia de comparación, mientras que la figura 4b muestra la distribución de los delincuentes bajo la estrategia presentada en este trabajo. En términos de la utilidad de los delincuentes, la estrategia basada en teoría de juegos logra disminuir en un 16.98% la utilidad precibida por los delincuentes.

En la figura 5 se compara la utilidad percibida por los delincuentes a medida que



(a) (b)

Figure 4: Superficies de Densidad de Kernel Gausseana ($N = 2000$, $M = 20$)

aumenta la cantidad de policías en el ambiente. La linea continua muestra el efecto de la vigilancia basada en el modelo de este trabajo mientras que la linea discontinua muestra el resultado de la estrategia de vigilancia utilizada para compara. Como se puede ver, para una misma cantidad de recursos, distribuir los delincuentes en el ambiente de acuerdo al modelo basado en teoría de juegos obtiene mejores resultados que la estrategia de comparación.

4. Conclusiones y Trabajo Futuro

Como se puede observar de los resultados anteriores, distintas estrategias de vigilancia sobre un mismo ambiente genera distintos resultados en los pagos de los delincuentes. En general, se puede observar que bajo los supuestos realizados en este trabajo, la estrategia de vigilancia basada en un juego líder–seguidor obtiene mejores resultados que la estrategia de comparación. Al ser este un modelo estático, en este juego se considera que el número de delincuentes en el ambiente permanece fijo, pero es de esperar que al incluir la dimensión temporal en el modelo una reducción en la utilidad individual de los delincuentes conlleve a una reducción de los niveles de delincuencia en el ambiente.

Siguiendo con la idea anterior, muchas características propias del problema de la delincuencia como el *Broken Windows Effect*, o cambios en la población de delincuentes, solo se presentan al considerar el problema de manera dinámica. Es por esto que una extensión interesante a este trabajo es utilizar las herramientas de *Differential Games* para modelar el problema de manera dinámica incorporando de manera explicita los efectos intertemporales de las decisiones tanto de la policía como de los delincuentes.

Por otra parte, pocos estudios se han enfocado en caracterizar de manera cuantitativa el proceso de toma de decisiones de un delincuentes. El problema de determinar la forma funcional de la utilidad de un delincuente, elemento central en la formulación presentada en este trabajo, es clave para que el modelo sea una representación efectiva del problema que se enfrenta en la vía pública, y por lo tanto es un área que requiere mayor atención en el futuro.

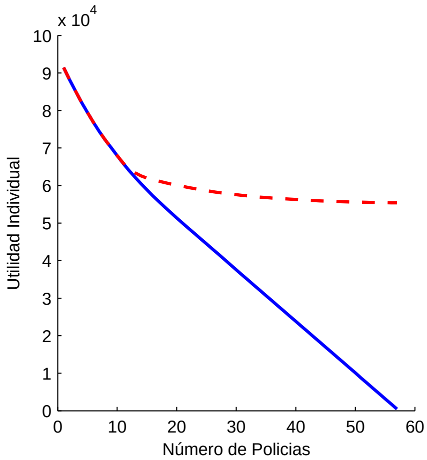


Figure 5: Utilidad vs N° Policías ($N = 2000$)

5. Bibliography

[1] Anselin, L., Cohen, J., Cook, D., Gorr, W., & Tita, G. (2000). Spatial analyses of crime. In D. Duffee (Ed.), *Measurement and Analysis of Crime and Justice* (pp. 213–262). Criminal Justice 2000 volume 4.

[2] Becker, G. S. (1968). Crime and punishment: An economic approach. *Journal of Political Economy*, *76*, 169–217.

[3] Blumstein, A., Cohen, J., & Nagin, D. (Eds.) (1978). *Deterrence and Incapacitation: Estimating the Effects of Criminal Sanctions on Crime Rates*. Washington, DC: National Academy of Sciences.

[4] Braga, A. (2001). The effects of hot spots policing on crime. *The Annals of American Political and Social Science*, *578*, 104–125.

[5] Brantingham, P. L., & Brantingham, P. J. (1982). Mobility, notoriety, and crime: A study in the crime patterns of urban nodal points. *Journal of Environmental Systems*, *11*.

[6] Clarke, R. V. (1980). Situational crime prevention: Theory and practice. *British Journal of Criminology*, *20*, 136–147.

[7] Clarke, R. V. (2008). Situational crime prevention. In R. Wortley, & L. Mazzerole (Eds.), *Environmental Criminology and Crime Analysis* (pp. 178–194). Willian Publishing.

[8] Clarke, R. V., & Cornish, D. B. (1985). Modeling offenders' decisions: A framework for research and policy. *Crime and Justice*, *6*, 147–185.

[9] Clarke, R. V., & Cornish, D. B. (2008). The rational choice perspective. In R. Wortley, & L. Mazzerole (Eds.), *Environmental Criminology and Crime Analysis* (pp. 21–47). Willian Publishing.

[10] Cressman, R., & Krivan, V. (2006). Migration dynamics for the ideal free distribution. *The American Naturalist*, *168*, 384–425.

[11] Di Tella, R., & Schargrodsky, E. (2004). Do police reduce crime? estimates using the allocation of police forces after a terrorist attack. *American Economic Review*, *94*, 115–133.

[12] Garoupa, N. (1997). The theory of optimal law enforcement. *Journal of Economic Surveys*, *11*, 267–295.

[13] Gibbons, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

[14] Krivan, V., Cressman, R., & Schneider, C. (2008). The ideal free distribution: A review and synthesis of the game-theoretic perspective. *Theoretical Population Biology*, *73*, 403–425.

[15] Levitt, S. D., & Miles, T. J. (2007). Empirical study of criminal punishment. In A. M. Polinsky, & S. Shavell (Eds.), *Handbook of Law and Economics* (pp. 455–495). volume 1.

[16] Lin, M.-J. (2009). More police, less crime: Evidence from u.s. state data. *International Review of Law and Economics*, *29*, 73–80.

[17] Nagin, D. (1998). Criminal deterrence research at the outset of the twenty-first century. *Crime and Justice*, *23*, 1–42.

[18] Riccio, L. (1974). Direct deterrence - an analysis of the effectiveness of police patrol and other crime prevention technologies. *Journal of criminal Justice*, *2*, 207–217.

[19] Sherman, L. W., Gottfredson, D., MacKenzie, D., Eck, J., Reuter, P., & Bushway, S. (1997). *Preventing crime: what works, what doesn't, what's promising. A report to the United States Congress*. Technical Report University of Maryland, Department of Criminology and Criminal Justice.

[20] von Stackelberg, H. F. (1934). *Marktform und Gleichgewicht*. Springer.

[21] Sutherland, E. H. (1947). *Principles of Criminology*. Philadelphia: J.B. Lippincott.

[22] Weisburda, D., & Eck, J. E. (2004). What can police do to reduce crime, disorder, and fear? *The ANNALS of the American Academy of Political and Social Science*, *593*, 42–65.

[23] Worrall, J. L., & Kovandzic, T. V. (2010). Police levels and crime rates: An instrumental variables approach. *Social Science Research*, *39*, 506–516.