

EL PROBLEMA DE SÍNTESIS DE FOURIER EN RADIO –ASTRONOMÍA Y SU RESOLUCIÓN MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES

Pablo E. Román

Centro de Modelamiento Matemático, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.
Av. Blanco Encalada 2120 Piso 7, Santiago, Chile. E-mail: proman@ing.uchile.cl

RESUMEN

El radio observatorio ALMA con una inversión cercana al billón de dólares esta pronto a entregar datos observacionales en el espectro de radio frecuencias con una resolución nunca antes lograda. Para una observación dada, este instrumento recoge un subconjunto discreto de la transformada de Fourier de la imagen, obteniendo volúmenes cercanos al Terabyte diario. Sin embargo, el problema de recuperar la imagen no pasa simplemente por usar la transformada inversa del conjunto de puntos. Este problema es conocido en matemáticas como “Fourier Synthesis” y sorprendentemente aún se encuentra como una floreciente línea de investigación en el campo del análisis armónico. Es crítico para este proceso los grandes volúmenes de datos que se producirían. Se detalla en este trabajo un algoritmo de optimización que tiene por objetivo minimizar el error cuadrático medio bajo restricciones. Se utilizan datos de la primera fase del radio observatorio ALMA, y se compara con los resultados obtenidos mediante el algoritmo CLEAN. Se obtienen imágenes que resultan cualitativamente equivalente a las obtenidas usando los métodos tradicionales. Estos resultados son una prueba de concepto que presenta la base para la investigación de mejores métodos variacionales en la síntesis de imágenes.

INTRODUCCIÓN

Las observaciones astronómicas usando radio interferometría datan desde los años 40 (McCready et al., 1947), cuando se comenzaron a realizar mapas de actividad solar usando una única antena en Australia que contrastaba las ondas de radio directas del sol con las que se reflejaban en el mar. La técnica de interferometría consiste en superponer las señales provenientes de diferentes ondas para extraer información sobre ellas. En el caso de dos antenas ubicadas en posiciones X_1 y X_2 que reciben señal de radio de una fuente lejana (Figura 1), se demuestra usando el teorema de Van Cittert-Zernike (Zernike, 1938) que el promedio temporal de la potencia V total de ambas señales es aproximadamente la transformada de Fourier (ecuación 1) de la intensidad de la imagen $I(s)$. La ventaja de usar observaciones interferométricas es que la resolución angular teórica de estos instrumentos es inversamente proporcional a la distancia entre las dos antenas ($|X_1 - X_2|$), por lo que disponer de muchas antenas en una superficie grande es como disponer de un telescopio de ancho comparable a la separación máxima.

$$V(X_1, X_2) = \int_{\Omega} I(s) e^{-2\pi i s \cdot (X_1 - X_2)/c} d\Omega(s) \quad (1)$$

La fórmula anterior corresponde al caso ideal en que la antena percibe señal en forma uniforme en todas las direcciones s del ángulo sólido Ω . Esto se corrige introduciendo un término multiplicativo $B(s)$ (o Haz primario) dentro de la integral que depende de la construcción de cada antena. Por ejemplo, si el receptor esta construido según un dipolo eléctrico, $B(s)$ se asemejará a la conocida potencia angular de emisión di-polar, entonces dicho instrumento percibirá un máximo en la dirección de orientación del dipolo y un mínimo en la perpendicular.

ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array) (ALMA Website, 2012) es fruto de la colaboración internacional financiada por la agencia Europea ESO (European Southern Observatory), Estados Unidos con NRAO (National Radio Astronomy Observatory), el observatorio radio astronómico de Japón (NAOJ), y el soporte de la república de Chile. El monto de inversión actual en la implementación del instrumento astronómico bordea los US\$1.3 billones. Se espera que el instrumento ALMA disponga de un conjunto de 66 antenas que es equivalente a un telescopio de 14 kilómetros de radio.

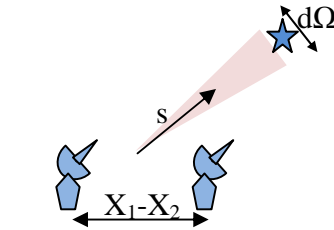


Figura 1. Geometría de dos antenas.

El telescopio radio interferométrico medirá entonces los valores de V_{ij} o visibilidades por cada par de antenas (i,j) que disponga. Esto significa $66 \times (66 - 1)/2 = 2145$ mediciones. Cada una de estas mediciones puntuales en el espacio de Fourier se multiplexan con variaciones de frecuencia y diferentes inclinaciones debido a la rotación de la tierra llegando a recolectar diariamente un Terabyte de datos diarios por objeto estelar observado. La resolución angular teórica de este instrumento se espera que sea cercana a 0,6 arco-segundos.

El procesamiento de dicho conjunto de datos $\{V_{ij}\}$ para generar imágenes es conocido como “síntesis de imágenes” o “Fourier Synthesis”. Para obtener una aproximación de la imagen representada por la función $I(s)$, es necesario de alguna forma “invertir” la relación (1) usando la información parcial contenida en el conjunto de datos $\{V_{ij}\}$. El algoritmo CLEAN (Hogbom, 1974) es considerado el estado del arte para resolver este problema y esta implementado en el paquete de software CASA (Common Astronomy Software Applications) (CASA Website, 2012) e implementado por la NRAO para su uso en datos obtenidos por el observatorio ALMA.

CLEAN (Rich et al., 2008) ha sido comparado con muchos otros algoritmos de reconstrucción de imágenes y actualmente es la base del procedimiento oficial para síntesis de imágenes de ALMA. En su versión más simple CLEAN se basa en aproximar la imagen usando lo que se denomina como “mapa sucio”. El mapa sucio ID (ecuación 2) es la imagen obtenida aplicando en forma “naïve” la transformada de Fourier inversa sobre el conjunto de visibilidades $\{V_{ij}\}$. Las variables (x,y) corresponden a las coordenadas planas en la imagen escalada y centrada en el ángulo solido s . Los puntos (u_{ij},v_{ij}) son proporcionales a (X_j-X_i) , también llamada línea de base. En este sentido las ubicaciones relativas de pares de antenas corresponden a puntos en el plano complejo de Fourier.

$$I^D(x, y) = \sum_{ij} V_{ij} e^{-2\pi i(u_{ij}x + v_{ij}y)} \tag{2}$$

El algoritmo CLEAN básico se expresa de la siguiente forma:

- i. Inicialización: $I^R = I^D, I^M = 0, k = 1$.
- ii. Construir la componente C^*_k , tal que $F^{-1}(C^*_k)$ cubra de forma óptima al máximo observado en I^R .
- iii. $I^M \leftarrow I^M + F^{-1}(C^*_k)$
- iv. Hacer un muestreo de $F(I^M)$ en los puntos (u_{ij}, v_{ij}) y obtener su versión de mapa sucio I^{DM} utilizando la discretización de la transformada de Fourier.
- v. $I^R \leftarrow I^D - I^{DM}$
- vi. Si el máximo observado en la imagen residual I^R es menor que una cierta tolerancia terminar, sino $k++$ y volver al paso (ii).

En el algoritmo anterior se considera F y F^{-1} como la transformada y anti-transformada de Fourier en su versión discretizada como en la relación (3). El conjunto de muestreo es indexado por S' y S . Hay que hacer notar que solo bajo condiciones especiales de regularidad de la discretización se tiene que F y F^{-1} son operadores inversos. Cada símbolo I es un vector de imagen y C^*_k es la transformada de una imagen con intensidad muy concentrada en torno al punto de máxima intensidad. La imagen resultante va a corresponder a la suma de componentes C^*_k cuyo muestreo en los puntos (u_{ij}, v_{ij}) se asemeja al mapa sucio. Existen variaciones de este algoritmo que utilizando diferentes tipos de componentes a diferentes escalas logran una mejor calidad de imagen (Cornwell, 2008). La figura 2 ilustra en una dimensión un muestreo discreto sobre una función y su efecto en la figura 3 en el mapa sucio y solución CLEAN.

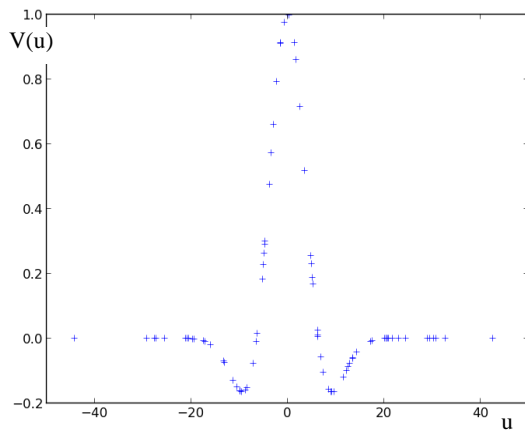


Figura 2: Muestreo no uniforme 1-D de visibilidades.

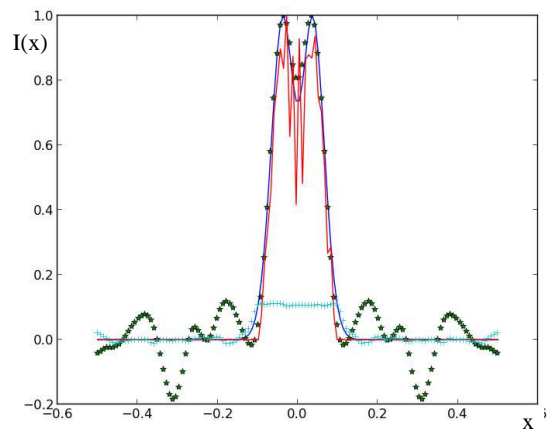


Figura 3: Línea Roja: iteración 1-D de CLEAN, línea Azul: imagen 1-D original, *: mapa sucio, +: imagen de residuos.

$$F(\phi(Z)) = \sum_{k \in S} \phi(X_k) e^{2\pi i X_k \cdot Z}, \quad F^{-1}(\phi(Z)) = \sum_{k \in S'} \phi(Z_k) e^{-2\pi i X \cdot Z_k} \quad (3)$$

En lo que queda de este artículo, detallamos en la sección 2, la definición del problema de la síntesis de Fourier y nuestra propuesta como problema variacional. En la sección 3, se describe un método numérico simple que permitió como se describe en la sección 4, obtener resultados comparables al mejor algoritmo existente. Finalmente, en la sección 5 concluye delineando futuras investigaciones sobre este tema.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

A nuestro juicio no se puede dejar pasar el gran éxito (Cornwell, 2008) que ha tenido el algoritmo CLEAN para resolver el problema de síntesis de imágenes pero encontramos que tiene ciertas deficiencias teóricas (Maréchal et al., 2009; Lannes et al., 1994). Adicionalmente, con la llegada de instrumental de mayor precisión y que entrega volúmenes de datos sin precedentes, es necesario hacer una revisión mas detallada del problema de invertir la transformada de Fourier con información incompleta del espacio de frecuencias.

Síntesis de Fourier.

Recientemente se ha formalizado el concepto de aproximar una función usando un conocimiento parcial de su transformada de Fourier (Maréchal et al., 2009) lo que se denomina Síntesis de Fourier (“Fourier Synthesis”). El problema se formula a través del operador truncado de Fourier. Donde F es la transformada de Fourier estándar, I_W es la función indicatriz del conjunto W . En el fondo se restringe la imagen de la función transformada al conjunto W sobre funciones de dominio V . El problema que se define es encontrar la función f dada la función Af (definición 4). Si W es acotado se dice que es un problema de extrapolación de Fourier, en el caso que el complemento de W es acotado es un problema de interpolación de Fourier. Se asume W y V subconjuntos del espacio real de n dimensiones acotados ya que tanto las visibilidades como la imagen lo son.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : L^2(V) &\rightarrow L^2(W) \\ f &\rightarrow \mathbb{A}f = \mathbb{1}_W \mathbf{F}(f) \end{aligned} \quad (4)$$

En forma más explícita la función Af esta dada por un kernel (ecuación 5):

$$(\mathbb{A}f)(Z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(X) \mathbf{K}(X, Z) dX = \int_{\mathbb{R}^n} f(X) e^{2\pi i X \cdot Z} \mathbb{1}_V(X) \mathbb{1}_W(Z) dX \quad (5)$$

El operador dual \mathbb{A}^* tiene por kernel (ecuación 6) el complejo conjugado usando el teorema de Fubini.

$$\mathbf{K}(Z, X) = e^{-2\pi i Z \cdot X} \mathbb{1}_W(Z) \mathbb{1}_V(X) \tag{6}$$

El estudio de este operador tiene particular interés al momento de encontrar f dada la relación (4). Esto se denomina un problema inverso tal como se ha expuesto aquí adolece de las buenas propiedades requeridas para poder resolverlo. Se tiene que su inversa no es continua como se demostró en (Lannes et al., 1994). Problemas con esas características se denominan “ill-posed” o problemas mal puestos y son parte central de la teoría de los problemas inversos (Tikhonov et al., 1997) en matemáticas. En el caso de la síntesis de imágenes, una forma estándar (ecuación 7) de atacar estos problemas es considerar un término de regularización R en el problema de minimización de forma tal de que el problema resulte convexo y con solución única (convexo estricto) dependiente en forma continua de las visibilidades V .

$$\min_{I \in L^2_V} \frac{1}{2} \|V - \mathbb{A}I\|_{L^2(W)}^2 - \lambda R(\mathbb{1}_V I) \tag{7}$$

El efecto de tener un conjunto $W=\{V_{ij}\}$ discreto de las visibilidades se puede representar por una función de muestreo $S(Z)$ (ecuación 8) que es una combinación lineal de distribuciones de Dirac en el conjunto de puntos $\{Z_{ij}=(u_{ij}, v_{ij})\}$. La función de visibilidad $V(Z)$ se reemplaza por su muestreo $S(Z)V(Z)$ dando un mayor peso w_{ij} a las visibilidades con menor error de medición.

$$S(Z) = \sum_{ij} \omega_{ij} \delta(Z - Z_{ij}) \tag{8}$$

Volviendo al algoritmo CLEAN, el mapa sucio I^D (ecuación 9) corresponde a una convolución con el llamado “Haz sucio” $B(X)$ en 10) de la imagen real. Por lo que el algoritmo CLEAN busca de-convolucionar el haz sucio del mapa sucio. De esta forma CLEAN pretende minimizar el error en el espacio de la imagen (e.g. Marsh et al., 1987) versus la formulación (7) que busca la minimización en el espacio de las visibilidades.

$$I^D(X) = \mathbf{F}^{-1}(S(Z)V(Z)) = F^{-1}(S) * F^{-1}(V) = B(X) * I(X) \tag{9}$$

$$B(X) = \mathbf{F}^{-1}(S(Z)) = \sum_{ij} \omega_{ij} \cos(2\pi X \cdot Z_{ij}) \tag{10}$$

Problemas actuales en síntesis de imágenes en radio astronomía.

A pesar de ser un problema de larga data su formalización matemática es reciente (Maréchal et al., 2009). Mas aún, faltan ciertas garantías que permitan a los científicos que usen las imágenes reconstruidas tener una noción del grado de validez que tienen. Se enumeran a continuación un resumen de los problemas que se identifican de los métodos actuales.

- a) **No se conocen a priori las imágenes exactas:** En síntesis de imágenes radio-astronómicas no son conocidas las imágenes a priori. Esto porque no existe en el ser humano un órgano que vea en el espectro de radio-frecuencias y aunque existan imágenes en el espectro visible es difícil inferir que tipo de imágenes de radio se podrán generar. En otros campos de la espectroscopia como es la generación de imágenes médicas por resonancia magnética nuclear (Erasmus et al., 2004) este problema no existe, ya que la forma de los órganos del cuerpo humano es bastante conocida. En estos casos, el algoritmo de reconstrucción puede usar esta información a priori para producir un mucho mejor ajuste de la imagen observada. En el fondo la forma de la solución al problema de optimización es conocida para el caso de síntesis de Fourier en MRI.
- b) **Formulación del problema es “ill-posed”:** Como mencionábamos en la sección anterior el problema sin regularización es no continuo y por tanto sin solución única. La teoría de los problemas inversos tiene por uno de sus objetivos el de establecer métodos de regularización que permiten asegurar que la solución del problema planteado es efectivamente la única solución. Básicamente, los problemas inversos se resuelven con métodos de optimización cuyo análisis entrega cual es la calidad de ajuste del modelo. En este caso se estima conveniente el uso de noción de dualidad de Fenchel que podría llegar a entregar una medida de calidad a la solución entregada (Maréchal et al., 2009).
- c) **No hay concepto de error en la imagen generada:** La calidad de imagen actualmente se mide con el llamado rango dinámico (Intensidad máxima/Intensidad ruido) o equivalentemente el valor “Peak-

to-noise” medido en decibelios (Pappas et al., 2000). Sin embargo, no existe una claridad al respecto si esa medida es un indicador comparativo de una imagen a otra. Como adelantamos en el punto anterior, un modelo variacional para síntesis de imágenes puede entregar en forma natural una medida de ajuste de la imagen. Aunque lo que se requiere es disponer de una medida de error por región de la imagen. Esto beneficiaría en gran medida la identificación de objetos estelares en imágenes radio-astronómicas.

- d) **Fenómeno de Gibbs es mayor a mayor cantidad de datos:** Cuando se intenta invertir desde el plano de Fourier usando solo una parte del espectro ocurre lo que se denomina el fenómeno de Gibbs. Las frecuencias faltantes inducen en la imagen generada oscilaciones cuya frecuencia es mayor mientras mayor es la cantidad de puntos. Se muestra para un experimento en una dimensión para el fenómeno de Gibbs (Jerri, 2011) en el mapa sucio dado el muestreo irregular que aparece en la figura 3 (signos *). Existen una variedad de métodos entre ellos los términos de regularización que permiten prácticamente borrar estas oscilaciones. Sin embargo, estos métodos de regularización corren el riesgo de borrar algún objeto estelar de baja intensidad y dado que no se conoce la imagen real pasaría desapercibido.
- e) **Datos masivos y performance:** La masividad de datos que podrán entregar los nuevos instrumentos radio-astronómicos da la impresión que permitirán recuperar imágenes de alta resolución. Sin embargo hay dos problemas que se enfrentan en este ámbito. La complejidad del algoritmo en los datos de entrada ($\sim 10^8$ medidas) es clave al momento de procesar los datos y la sensibilidad del algoritmo a la dimensión del espacio de la imagen ($\sim 10^6$ píxeles o variables). En consecuencia se requieren de procedimientos de procesamiento paralelo de forma de poder procesar la imagen en un tiempo razonable. Basta con pensar en cuanto demoraría recorrer todo el Terabyte de datos para obtener alguna medida. Pero aunque se disponga de grandes procesadores de datos, la factibilidad matemática de convergencia del algoritmo y el ajuste se vuelven críticos en la práctica.

La dificultad principal de la cual derivan los problemas anteriores es que aun no existe una teoría completa sobre la síntesis de Fourier usando un muestreo irregular de puntos. La teoría de Shannon-Nyquist es exacta cuando el muestreo es regular y ella describe las condiciones en las cuales permiten procesar hoy en día las señales digitales (Bremau, 2002). Para el caso de datos interferométricos, el muestreo es intrínsecamente irregular y varía de acuerdo a por ejemplo las condiciones climáticas o la posición del objeto observado. Bajo esta restricción en la actualidad se desconocen de métodos estadísticos que permitan analizar en forma científica los resultados (imágenes) de las mediciones.

Método numérico

Se propone explorar el esquema propuesto en el modelo de optimización (7), minimizando el error cuadrático con restricciones de positividad de la intensidad de la imagen ($I(X) > 0$). En este caso $R=0$. Se escoge el método del gradiente conjugado en la variante de Polak-Ribière (Press, 1992) con chequeo de positividad bajo truncamiento y optimizando la dirección conjugada mediante el método de Brent (Press, 1992). El procedimiento sencillo para minimizar $f(x)$ se detalla en la regla de iteración (11-14). Se utilizan los gradientes en forma explícita dado las propiedades analíticas de la función objetivo. El algoritmo termina cuando la norma de $\alpha_n d_n$ es menor a un parámetro de tolerancia.

$$d_n = -\nabla f(x_n) + \beta_n s_{n-1} \tag{11}$$

$$\beta_n = \frac{\nabla f(x_n)^T (\nabla f(x_n) - \nabla f(x_{n-1}))}{|\nabla f(x_{n-1})|^2} \tag{12}$$

$$\alpha_n = \text{Argmin}_{\alpha} f(x_n + \alpha d_n) \tag{13}$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n \tag{14}$$

RESULTADOS

Se ilustra nuestros esfuerzos actuales en síntesis de imágenes con datos del radio observatorio ALMA. La imagen etiquetada 'CASA' (figura 4) proviene del cubo de imágenes reducido por frecuencia en el ciclo “Science Verification Data” del observatorio ALMA. La imagen etiquetada “Home made” esta construida según nuestro método (ecuación 2.3). Estas observaciones son sobre el choque de galaxias llamado “Antennae-North galaxy merger” (ADS/JAO.ALMA#2011.0.00003.SV). Las imágenes tienen niveles de intensidad muy similares, pero fueron normalizadas para fines comparativos. Las unidades en (x, y) son

segundos de arco. La escala de grises varía del blanco (menos intenso =0) al negro (mas intenso=1).

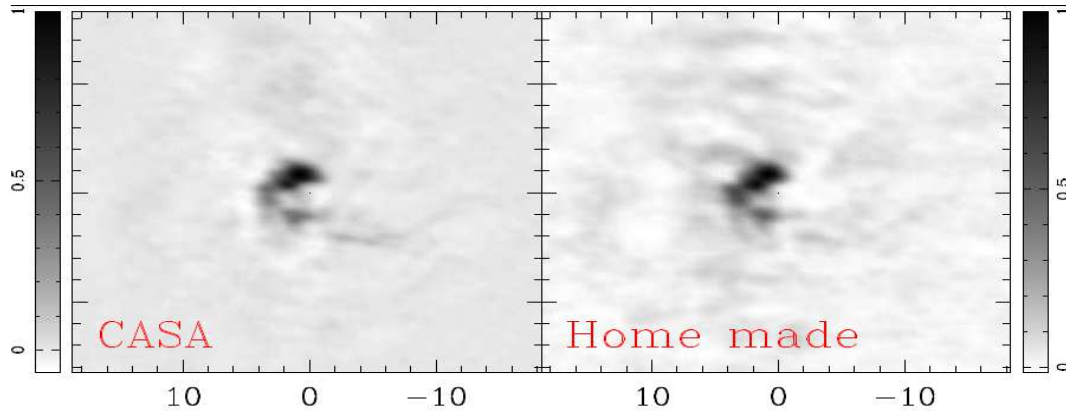


Figura 4: Imágenes del objeto “Antennae-North galaxy merger” obtenidas con el método CLEAN (oficial release de ALMA) y nuestra propuesta de reconstrucción (Home made).

Se compara el canal de frecuencia 343.94GHz entregado oficialmente por ALMA (izquierda) con nuestra reconstrucción. Una medida de calidad de imagen usada en análisis de señales es el rango dinámico (razón valor máximo/mínimo) el cual es de 14.8 Db en la imagen oficial y de 86.7 Db en el caso de nuestra reconstrucción. A mayor rango dinámico mayor calidad es la reconstrucción. Ambas imágenes fueron obtenidas considerando el haz primario propio del instrumento. Hay que hacer notar una aureola blanca en el entorno del objeto central en la imagen de ALMA. Este tipo de efectos son comunes cuando el algoritmo de de-convolución tiene imperfecciones angulares negativas (caso del algoritmo CLEAN) y que en el caso de nuestra reconstrucción esta ausente. Se ven dos franjas claras verticales en la parte superior que corresponden a objetos artificiales o llamados oscilaciones de Gibbs, tampoco presentes en nuestra reconstrucción. Además, la intensidad de ruido en nuestra reconstrucción es similar al ruido termal esperado y mucho menor que la observada en la imagen “CASA”.

El experimento se llevó a cabo procesando el set de visibilidades ADS/JAO.ALMA#2011.0.00003.SV en formato ms y filtrando por canal de frecuencia y polarización mediante el software CASA (CASA Website, 2012) para la porción norte del set de datos. Posteriormente, se exportaron los datos al formato FITS para su procesamiento mediante el uso de la librería CFITSIO (FITSIO Website, 2012). Usando las librerías C del libro “Numerical Recipes” (Press, 1992) se construyó un programa que realizó la búsqueda de un mínimo para el problema de optimización de la ecuación 2.3 mediante la regla descrita en las ecuaciones 3.1-4. El óptimo a una tolerancia de 10^{-7} se llega después de 3 horas de ejecución por canal y polarización usando un procesador intel-i3 de 2,5GHz.

CONCLUSIÓN

El algoritmo CLEAN reconstruye las imágenes desde un muestreo del plano de Fourier en forma iterativa mediante la adición de componentes que van minimizando los residuos con respecto al mapa sucio (inversión de Fourier directa). Este método es empíricamente efectivo pero dista mucho de tener un soporte teórico. La introducción de métodos variacionales de síntesis de imágenes permitirá obtener una teoría más acabada del problema así como también una medida de error más consecuente con el método usado. En este sentido podrían explorarse algoritmos duales para disponer de una medida de GAP global/local de la imagen obtenida. Aunque por ser un tema de reciente investigación aún esta por estudiarse los distintos funcionales que pueden ser usados para modelar el problema. Con el inminente comienzo de la etapa con toda la capacidad de observación del proyecto ALMA, urge la necesidad de investigar y mejorar los algoritmos actuales considerando grandes volúmenes de datos. Usando un esquema de optimización simple se generaron imágenes de calidad mejor o al menos comparable con el mejor algoritmo disponible. Esto es una prueba de concepto que permite ilustrar la importancia de desarrollar nuevos algoritmos para la síntesis de imágenes. En lo que respecta a la implementación práctica de estos algoritmos será necesario considerar una paralelización

del procedimiento, esto es debido a él volumen del flujo diario de datos del orden de 1 Terabyte diario.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile – Laboratorio de Astroinformática y al proyecto Fondecyt 1100221 liderado por el Dr. Simón Casassus. Se agradece también la gentileza de Simón Casassus por compartir las imágenes propietarias de la Figura 4.

REFERENCIAS

- ALMA Website.** <http://www.almaobservatory.org/> , Retrieved November 2012.
- Bremau, P. (2002). *Mathematical Principles of Signal Processing: Fourier and Wavelet Analysis*, Springer.
- Cornwell, T. J. (2008). Multi-Scale CLEAN deconvolution of radio synthesis images, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2 (5), 793-801.
- Erasmus, L. J., Hurter, D. , Naude, M., Kritzing, H. G., and Acho, S. (2004). A short overview of mri artefacts. *South African Journal of Radiology*, 8(2), 13–17.
- FITSIO Library Website. <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/fitsio/>, Retrieved November 2012.
- Hogbom, J. (1974). Aperture Synthesis with a Non-Regular Distribution of Interferometer Baselines, *Astron & Astrophys. Suppl.* 15, 417.
- Jerri, A.J. (2011). *Advances in the Gibbs Phenomenon*. Sampling Publishing, New York, USA.
- Lannes, A., Roques, S., and Casanove, M.-J. (1994). Stabilized reconstruction in signal processing; Part 1: Regularization principle, *Journal of Modern Optics*, 41, 1537-1574.
- Maréchal, P., Wallach, D. (2009). Fourier synthesis via partially finite convex programming, *Mathematical and Computer Modelling*, 49(11), 2206-2212.
- Marsh, K. A., and Richardson, J. M. (1987). The objective function implicit in the CLEAN algorithm, *Astronomy and Astrophysics*, 182, 174-178.
- McCready, L.L., Pawsey, J.L., and Payne-Scott, R. (1947). Solar radiation at radio frequencies and its relation with sunspot, *Proc. Royal Society A*, 190, 357-375.
- NRAO Website.** <http://casa.nrao.edu/>, Retrieved November 2012.
- Pappas, T., and Safranek, R. (2000). Perceptual criteria for image quality evaluation. *Handbook of Image and Video Processing*, chapter VIII, 669–687. Academic press.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., and Flannery, B.P. (1992). *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, chapter 10, section 6: Conjugate Gradient Methods in Multidimensions, Cambridge University Press; 2nd edition.
- Rich, J.W., de Blok , W. J. G., Cornwell, T. J., Brinks, E., Walter, F., Bagetakos, I., and, Kennicutt, R. C. Jr. (2008). Multi-Scale CLEAN: A Comparison of its Performance Against Classical CLEAN on Galaxies Using THINGS, *The Astronomical Journal*, 136 (6), 2897.
- Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. Y . (1977). *Solutions of ill-posed problems*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.: John Wiley & Sons, New York.
- Zernike, F., (1938). The concept of degree of coherence and its application to optical problems, *Physica* 5, 785-795.